Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Μέρος 7ο: Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Εξάμηνο: 7ο

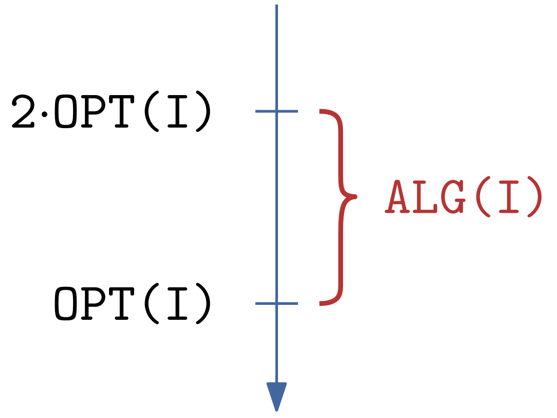
Κωδικός μαθήματος: 748

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

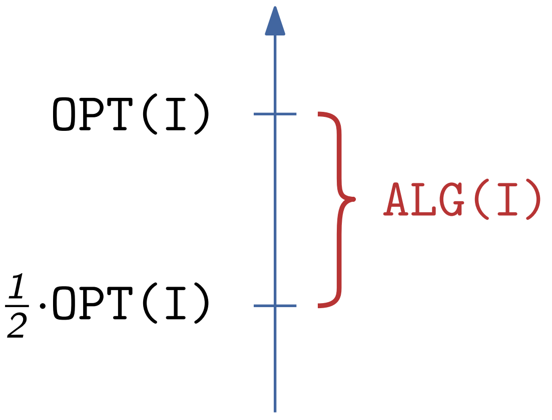
Μιχάλης Α. Μπέκος
bekos@uoi.gr

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

- **Ορισμός:** Ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος `ALG` είναι a(n)-προσεγγιστικός για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης $\Pi \iff$ για κάθε στιγμιότυπο $\mathtt{I}$ του Π με βέλτιστη τιμή $\mathtt{OPT(I)}$ και μέγεθος n, η επιστρεφόμενη τιμή $\mathtt{ALG(I)}$ του `ALG` είναι τέτοια ώστε:
  - Αν το Π είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης: $\mathtt{ALG(I)} \geq \frac{1}{\mathrm{a(n)}} \cdot \mathtt{OPT(I)}$
  - Αν το Π είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης: $\mathtt{ALG(I)} \leq \mathtt{a(n)} \cdot \mathtt{OPT(I)}$
- Επεξήγηση για $\mathtt{a(n)}=2$:



πρόβλημα ελαχιστοποίησης



πρόβλημα μεγιστοποίησης

Πώς γίνεται η σύγκριση με το $\texttt{OPT(I)}$;

- Ιδέα: Με χρήση ενός κάτω ή άνω φράγματος για το $\texttt{OPT(I)}$ ανάλογα με τον τύπο του Π.

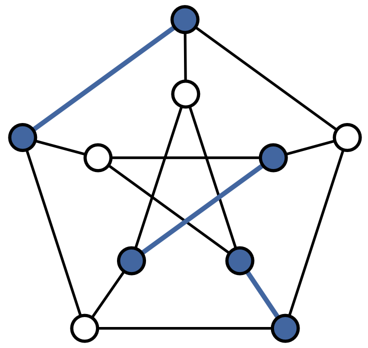
- Πιο συγκεκριμένα, αν $\texttt{B(I)} \leq \texttt{OPT(I)} \leq \texttt{U(I)}$, τότε:
  - $\texttt{ALG(I)} \leq \texttt{a(n)}\cdot\texttt{B(I)} \Rightarrow \texttt{ALG(I)} \leq \texttt{a(n)}\cdot\texttt{OPT(I)}$ $\quad\Pi \rightarrow$ πρόβλημα ελαχιστοποίησης
  - $\texttt{ALG(I)} \geq \frac{1}{a(n)}\cdot\texttt{U(I)} \Rightarrow \texttt{ALG(I)} \geq \frac{1}{a(n)}\cdot\texttt{OPT(I)}$ $\quad\Pi \rightarrow$ πρόβλημα μεγιστοποίησης

Το Πρόβλημα Vertex Cover

- Είσοδος: Ένα συνδεδεμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
- Έξοδος: Ένα σύνολο $S \subseteq V$ ελάχιστης πληθικότητας, τέτοιο ώστε για κάθε ακμή $(u, v) \in E$: $u \in S$ ή $v \in S$

- Ένας απλός 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος:

```
Repeat as long as an edge exists:
   Pick an edge (u,v) and add u and v to VC;
   Remove u, v, and all the edges incident to them;
Return VC;
```



- Ανάλυση: Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_m$ οι επιλεγμένες ακμές
  - Παρ. 1: $\mathtt{ALG(I)} = 2\mathtt{m}$
  - Παρ. 2: $\mathtt{m} \leq \mathtt{OPT(I)}$ ← η ίδια κορυφή δεν μπορεί να καλύψει περισσότερες από μία ακμές του ταιριάσματος

$$\mathtt{ALG(I)} \leq 2 \cdot \mathtt{OPT(I)}$$

Ένας ακόμη 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Vertex Cover

- Το Vertex Cover πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ILP:

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimize} & \sum_{v \in V} x(v) \\ \textbf{subject to} & x(u) + x(v) \geq 1, \forall (u,v) \in E \\ & x(v) \in \{0,1\}, \quad \forall v \in V \end{array} \xrightarrow{\text{Relaxation}} \begin{array}{ll} \textbf{minimize} & \sum_{v \in V} x(v) \\ \textbf{subject to} & x(u) + x(v) \geq 1, \forall (u,v) \in E \\ & 0 \leq x(v) \leq 1, \quad \forall v \in V \end{array}$$

- Υπολόγισε μια βέλτιστη λύση $X^* = \{x^*(v) : v \in V\}$ της δεύτερης διατύπωσης
- Επέστρεψε το σύνολο $S = \{v \in V : x^*(v) \geq \frac{1}{2}\}$
  - Παρ. 1: Το S καλύπτει όλες τις ακμές του G, αφού $x^*(u) + x^*(v) \geq 1, \forall (u,v) \in E$
  - Παρ. 2: $\sum_{v \in V} x^*(v) \leq \texttt{OPT(I)}$
  - Παρ. 3: $\frac{1}{2} \cdot |S| \leq \sum_{v \in V} x^*(v)$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{v \in V} x^*(v) \leq \texttt{OPT(I)} \\ \frac{1}{2} \cdot |S| \leq \sum_{v \in V} x^*(v) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |S| \leq \texttt{OPT(I)}$$

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP)

The Travelling Salesman Problem

- Είσοδος: Ένα πλήρες γράφημα με βάρη $G = (V, E, w)$, όπου $w : E \to \mathbb{R}^+$
- Έξοδος: Ένας κύκλος ελάχιστου βάρους που επισκέπτεται κάθε κορυφή μία φορά

- Metric TSP: Μια παραλλαγή του TSP προβλήματος στην οποία τα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα:

  $w(u, v) \leq w(u, z) + w(z, v)$

- Σημείωση: Τόσο το TSP πρόβλημα όσο και το Metric TSP πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP)

- Θεώρημα: Το TSP πρόβλημα δεν επιδέχεται $a(n)$-προσεγγιστικού αλγορίθμου, εκτός αν $P = NP$

  πολυωνυμικού χρόνου υπολογίσιμη συνάρτηση

  Απόδειξη:

  Η αναγωγή γίνεται από το NP-πλήρες πρόβλημα εύρεσης Hamiltonian Κύκλου:

  - Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, E)$
  - Έξοδος: Ένας κύκλος που επισκέπτεται κάθε κορυφή μία φορά

  Υποθέστε το αντίθετο: $\mathtt{ALG(I)} \leq \mathtt{a(n)}\cdot\mathtt{OPT(I)}$ για κάθε στιγμιότυπο $\mathtt{I}$.

  Δοθέντος ενός γραφήματος $G = (V, E)$, έστω $H = (V, V \times V, w)$ στιγμιότυπο του TSP με:

  - $w(e) = 1$, αν $e \in E$
  - $w(e) = a(n) \cdot n$, αλλιώς

  $\mathtt{ALG(H)} \leq a(n) \cdot n$ $\mathtt{ALG(H)} > a(n) \cdot n$

  Αν το G είναι Χαμιλτονιανό, το βάρος του TSP στο H είναι n. Αλλιώς, είναι $> a(n) \cdot n$.

Ένας 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP πρόβλημα

- Θεώρημα: Το Metric TSP πρόβλημα επιδέχεται 2-προσεγγιστικού αλγορίθμου

Απόδειξη:

`Compute a Minimum Spanning Tree T of G`

`H` $\leftarrow$ `the (non-simple) graph obtained by walking around T` $\Rightarrow w(H) = 2w(T)$ (1)

`Return the Hamiltonian Cycle C that short-cuts H` $\Rightarrow w(C) \leq w(H)$ (2)

(για την απομάκρυνση διπλό-κορυφών)

Ισχυρισμός: $w(C) \leq 2 \cdot \mathtt{OPT(I)}$

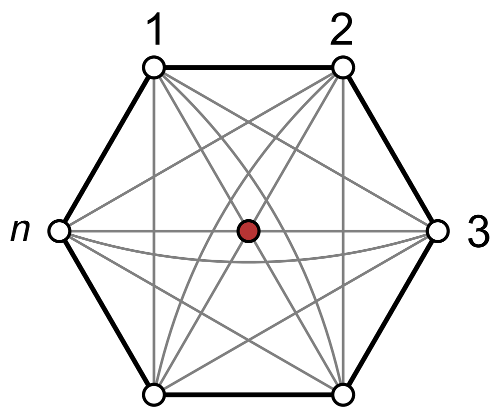
Απόδειξη:

- Έστω C^* ο βέλτιστος κύκλος του Metric TSP

$$\left.\begin{array}{ll} \circ\ P \leftarrow C^* \setminus \{e\} \quad \Rightarrow w(P) \leq w(C^*) & (3) \\ \circ\ T \leftarrow \text{MST του } G \Rightarrow w(T) \leq w(P) & (4) \end{array}\right\} \Rightarrow w(C) \overset{(2)}{\leq} w(H) \overset{(1)}{=} 2w(T) \overset{(4)}{\leq} 2w(P) \overset{(3)}{\leq} 2w(C^*) = 2\mathtt{OPT(I)}$$

Ήταν αυστηρή η ανάλυση;

- Έστω το εξής στιγμιότυπο του TSP όπου κάθε γκρι ακμή έχει βάρος 1, ενώ κάθε μαύρη 2.
  - Ένα ελάχιστο διασυνδετικό δέντρο είναι ένα αστέρι με κέντρο την κόκκινη κορυφή
  - Η συντόμευσή του δίνει έναν κύκλο C που αποτελείται από $n - 1$ μαύρες ακμές και μία γκρί ακμή, δηλαδή, $w(C) = 2(n - 1) + 1$
  - Ωστόσο, ενας βέλτιστος κύκλος με βάρος n είναι εφικτό να βρεθεί



Ο αλγόριθμος του Χριστοφίδη

- **Θεώρημα:** Το Metric TSP πρόβλημα επιδέχεται 3/2-προσεγγιστικού αλγορίθμου

  Απόδειξη:

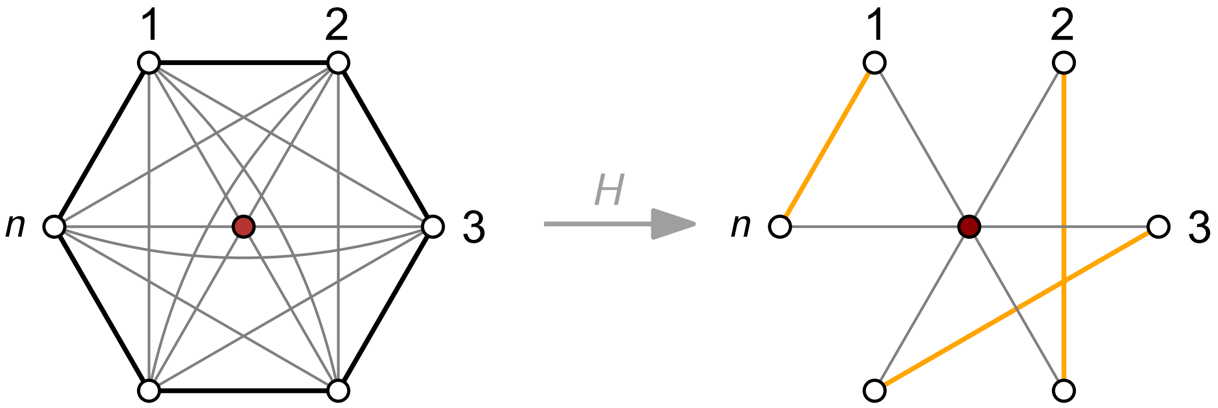
  `Compute a Minimum Spanning Tree T of G`

  $V_o \leftarrow$ `odd-degree vertices of T` — Τα φύλλα του T έχουν βαθμό 2 $\Rightarrow |V_o| \geq 2$

  `Compute a minimum-cost perfect matching M on` V_0 — Το M υπάρχει, καθώς το $|V_o|$ είναι άρτιος

  `H` $\leftarrow$ `the union of M and T` — Κάθε κορυφή του H έχει άρτιο βαθμό $\Rightarrow$ Το H είναι Eulerian

  `C` $\leftarrow$ `cycle obtained by the first appearance of each vertex on an Euler tour of H`



Ο αλγόριθμος του Χριστοφίδη

- Θεώρημα: Το Metric TSP πρόβλημα επιδέχεται 3/2-προσεγγιστικού αλγορίθμου

  Απόδειξη:

  `Compute a Minimum Spanning Tree T of G`

  $V_o \leftarrow$ `odd-degree vertices of T` Τα φύλλα του T έχουν βαθμό 2 $\Rightarrow |V_o| \geq 2$

  `Compute a minimum-cost perfect matching M on` V_0 Το M υπάρχει, καθώς το $|V_o|$ είναι άρτιος

  `H` $\leftarrow$ `the union of M and T` Κάθε κορυφή του H έχει άρτιο βαθμό $\Rightarrow$ Το H είναι Eulerian

  `C` $\leftarrow$ `cycle obtained by the first appearance of each vertex on an Euler tour of H`

  Ισχυρισμός: $w(M) \leq 1/2 \cdot \mathtt{OPT(I)}$

  Απόδειξη:
  - Έστω C^* ο βέλτιστος κύκλος του Metric TSP
  - $C \leftarrow$ ο περιορισμός του C^* στο V_o
  - $C = M_1 \cup M_2 \;\Rightarrow\; \mathtt{OPT(I)} = w(C^*) \geq w(C) = w(M_1) + w(M_2) \geq 2w(M)$

Ο αλγόριθμος του Χριστοφίδη

- Θεώρημα: Το Metric TSP πρόβλημα επιδέχεται 3/2-προσεγγιστικού αλγορίθμου

  Απόδειξη:

  `Compute a Minimum Spanning Tree T of G`

  $V_o \leftarrow$ `odd-degree vertices of T` Τα φύλλα του T έχουν βαθμό 2 $\Rightarrow |V_o| \geq 2$

  `Compute a minimum-cost perfect matching M on` V_0 Το M υπάρχει, καθώς το $|V_o|$ είναι άρτιος

  `H` $\leftarrow$ `the union of M and T` Κάθε κορυφή του H έχει άρτιο βαθμό $\Rightarrow$ Το H είναι Eulerian

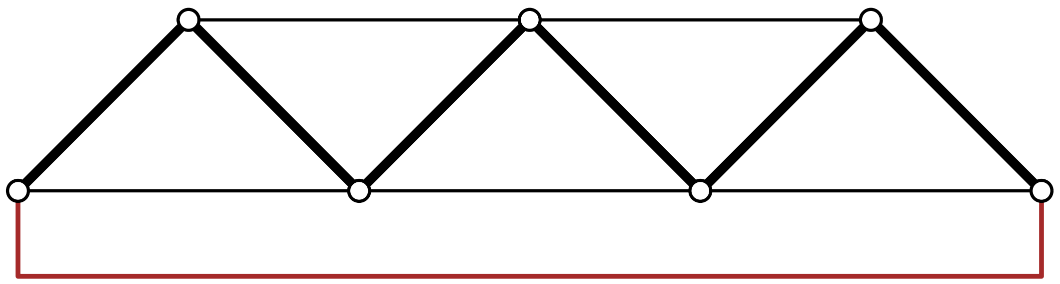
  `C` $\leftarrow$ `cycle obtained by the first appearance of each vertex on an Euler tour of H`

  Ισχυρισμός: $w(M) \leq 1/2 \cdot \mathtt{OPT(I)} \quad \Rightarrow \quad \mathtt{ALG(I)} \leq w(H) \leq w(T) + w(M) \leq \frac{3}{2}\mathtt{OPT(I)}$

  Απόδειξη:
  - Έστω C^* ο βέλτιστος κύκλος του Metric TSP
  - $C \leftarrow$ ο περιορισμός του C^* στο V_o
  - $C = M_1 \cup M_2 \;\Rightarrow\; \mathtt{OPT(I)} = w(C^*) \geq w(C) = w(M_1) + w(M_2) \geq 2w(M)$

Ήταν αυστηρή η ανάλυση;

- Έστω το εξής στιγμιότυπο του Metric TSP προβλήματος όπου όλες οι ακμές έχουν βάρος 1, εκτός από την κόκκινη που έχει βάρος $\lfloor n/2 \rfloor$.
  - Ένα ελάχιστο διασυνδετικό δέντρο είναι ένα μονοπάτι (σχεδιασμένο έντονο παρακάτω).
  - Μόνο δύο κορυφές περιττού βαθμού $\Rightarrow$ Το M περιέχει τη κόκκινη ακμή
  - Συνολικό βάρος: $n - 1 + \lfloor n/2 \rfloor$
  - Ωστόσο, ενας βέλτιστος κύκλος με βάρος n είναι εφικτό να βρεθεί



Το πρόβλημα Knapsack

- Είσοδος: Ένα σακίδιο χωρητικότητας B και n στοιχεία $\{a_1, \ldots, a_n\}$, τέτοια ώστε το στοιχείο a_i να έχει μέγεθος $s(a_i)$ και κέρδος $p(a_i)$
- Έξοδος: Ένα υποσύνολο S των στοιχείων μέγιστου κέρδους και μεγέθους είναι το πολύ B.
- Παράδειγμα:

στοιχείο	μέγεθος	κέρδος
a_1	1	1
a_2	2	2
a_3	5	18
a_4	6	22
a_5	7	28
	$B = 11$	

- Σημείωση: Το Knapsack πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

Μια λύση με χρήση δυναμικού προγραμματισμού

- Έστω P το κέρδος του πιο επικερδούς στοιχείου, δηλ, $P = \max_i p(a_i)$

$$\texttt{OPT(I)} \leq nP$$

- $S[i, p] \leftarrow$ ένα υποσύνολο των $\{a_1, \ldots, a_i\}$ του οποίου το κέρδος είναι p (αν υπάρχει)
- $A[i, p] \leftarrow$ το ελάχιστο μέγεθος του $S[i, p]$

- Υπολογίζουμε τον πίνακα A ως εξής:
  - $A[1, p] = \begin{cases} s(a_1), & \text{αν } p = p(a_1) \\ \infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$
  - $A[i+1, p] = \begin{cases} \min\{A[i, p], s(a_{i+1}) + A[i, p - p(a_{i+1})]\}, & \text{αν } p(a_{i+1}) \leq p \\ A[i, p] & \text{αλλιώς} \end{cases}$

- Έξοδος: $\max\{p : A(n, p) \leq B\}$, Πολυπλοκότητα: $O(n^2 P)$

$\uparrow$ ψευδοπολυωνυμικό

Ένα προσεγγιστικό σχήμα για το Knapsack πρόβλημα

- Given $\epsilon > 0$, let $K = \epsilon P/n$
  For each item a_i, set $p^*(a_i) = \lfloor p(a_i)/K \rfloor$
  With the new profits find the most profitable set S and return it

$$x - 1 \overset{(1)}{\leq} \lfloor x \rfloor \overset{(2)}{\leq} x$$

- Πολυπλοκότητα: $O(n^2 \lfloor P/K \rfloor) = O(n^2 \lfloor n/\epsilon \rfloor)$ ⟵ πολυωνυμική ως προς n και $1/\epsilon$: FPTAS
- Ισχυρισμός: $p(S) \geq (1-\epsilon) \cdot \mathtt{OPT(I)}$

Απόδειξη:
- $S_{opt} \leftarrow$ Το βέλτιστο σύνολο για το στιγμιότυπο I
- $p^*(a_i) = \lfloor p(a_i)/K \rfloor \overset{(1)}{\Rightarrow} p(a_i)/K - 1 \leq p^*(a_i) \Rightarrow p(a_i) - Kp^*(a_i) \leq K$
- Αθροίζοντας ως προς $i \in S_{opt}$: $p(S_{opt}) - Kp^*(S_{opt}) \leq K|S_{opt}| \Rightarrow$
  $p(S_{opt}) - Kp^*(S_{opt}) \leq Kn$ (3)
- $p(S) \geq Kp^*(S) \geq Kp^*(S_{opt}) \geq p(S_{opt}) - Kn = \mathtt{OPT(I)} - \epsilon P \geq (1-\epsilon) \cdot \mathtt{OPT(I)}$

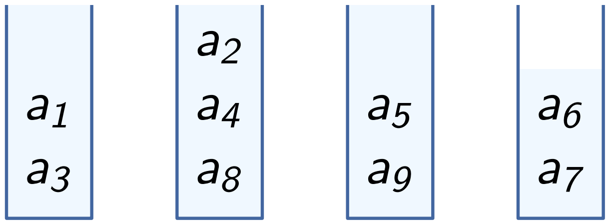
  (2) $\iff p(S)/K \geq p^*(S)$; S είναι βέλτιστο στις p^* ; (3) ; $Kn = \epsilon P$; $\mathtt{OPT(I)} \geq P$

Το πρόβλημα Bin Packing

- Είσοδος: n στοιχεία $\{a_1, \ldots, a_n\}$ τέτοια ώστε το στοιχείο a_i να έχει μέγεθος $s(a_i) \in (0, 1]$
- Έξοδος: Τοποθέτηση των στοιχείων σε ελάχιστου πλήθους κάδους μοναδιαίας χωρητικότητας

- Παράδειγμα:

στοιχείο	μέγεθος
a_1	0.5
a_2	0.7
a_3	0.5
a_4	0.2
a_5	0.4
a_6	0.2
a_7	0.5
a_8	0.1
a_9	0.6



Τοποθέτηση σε 4 κάδους

- Σημείωση: Το πρόβλημα Bin Packing είναι NP-πλήρες

Ο αλγόριθμος Next-Fit

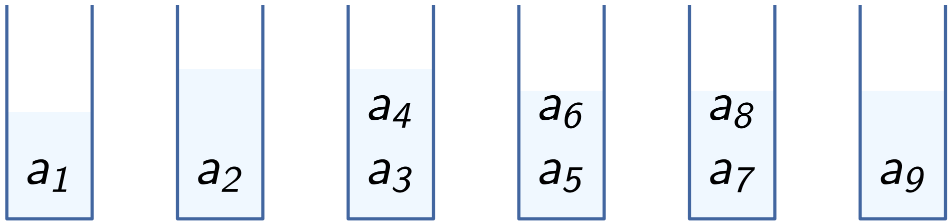
- Process the items in any order

  If the current item fits in the current bin, place it.

  Otherwise start a new bin.

- Παράδειγμα:

στοιχείο	μέγεθος
a_1	0.5
a_2	0.7
a_3	0.5
a_4	0.2
a_5	0.4
a_6	0.2
a_7	0.5
a_8	0.1
a_9	0.6



Τοποθέτηση σε 6 κάδους

Ο αλγόριθμος Next-Fit

- `Process the items in any order`

  `If the current item fits in the current bin, place it.`

  `Otherwise start a new bin.`

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Παρ. 1: } \mathtt{OPT(I)} \geq \sum_i s(a_i) \\[1em] \bullet\ \text{Παρ. 2: } \sum_i s(a_i) \geq \frac{1}{2}\mathtt{ALG(I)} \end{array}\right\} \text{Ο αλγόριθμος Next-Fit είναι 2-προσεγγιστικός}$$

- Εργασία: Προσπαθήστε να αποδείξετε ότι η παραπάνω ανάλυση είναι αυστηρή

Ένα φράγμα για τον συντελεστή προσέγγισης του Bin Packing

- Theorem: $\forall \epsilon > 0$ το Bin Packing δεν επιδέχεται $(3/2 - \epsilon)$-προσέγγιστης, εκτός αν $P = NP$

  Απόδειξη:

  Η αναγωγή γίνεται από το NP-πλήρες πρόβλημα Partition:

  - Είσοδος: n στοιχεία $\{a_1, \ldots, a_n\}$ τέτοια ώστε το στοιχείο a_i να έχει μέγεθος $s(a_i)$
  - Έξοδος: Ένα υποσύνολο A τέτοιο ώστε $\sum_{a \in A} s(a) = \sum_{a \notin A} s(a_i)$

  Υποθέστε το αντίθετο: $\texttt{ALG(I)} \leq \texttt{(3/2-}\epsilon\texttt{)}\cdot\texttt{OPT(I)}$ για κάθε στιγμιότυπο $\texttt{I}$.

  - Αν το I είναι αρνητικό στιγμιότυπο, ο αλγόριθμος $\texttt{ALG}$ θα χρησιμοποιήσει > 2 κάδους
  - Διαφορετικά, θα χρησιμοποιήσει $(3/2 - \epsilon) \cdot 2 \leq 2$ κάδους

  Επομένως, ο $\texttt{ALG}$ είναι ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Patrition, άτοπο.

Μια ειδική περίπτωση

- Λήμμα: Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Bin Packing όταν:
    - υπάρχουν το πολύ K μεγέθη στοιχείων
    - χωρούν το πολύ L αντικείμενα σε κάθε κάδο
    - τα K και L είναι σταθερές

Απόδειξη:

Πόσοι τύποι κάδων υπάρχουν;

$\left.\begin{array}{l}\text{○ το πολύ } L \text{ στοιχεία σε κάθε κάδο} \\ \text{○ το καθένα με το πολύ διαφορετικά μεγέθη}\end{array}\right\}$ το πολύ K^L τύποι κάδων

Πόσες διαφορετικές λύσεις;

- Όσες και το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_{K^L} \leq n$ όπου x_i είναι ο αριθμός των κάδων τύπου i
- Από το θεώρημα των αστεριών και των μπαρών: $O(n^{K^L})$

Η τυπική απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται στο μάθημα

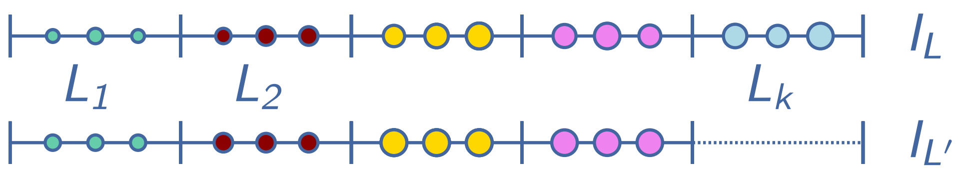
Ένα προσεγγιστικό σχήμα για το Bin-Packing πρόβλημα

- Θεώρημα: $\forall\epsilon > 0$ υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος ως προς n και $\frac{1}{\epsilon}$ που χρησιμοποιεί το πολύ $(1+\epsilon)\cdot \mathtt{OPT(I)} + 1$ κάδους ← Asymptotic PTAS

Απόδειξη:

Έστω $I = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ένα στιγμιότυπο του Bin Packing, το οποίο διαμερίζουμε ως εξής:

- $I_L = \{a \in I : s(a) \geq \epsilon\}$ the large items
- $I_s = \{a \in I : s(a) < \epsilon\}$ the small items



Χωρίζουμε τα στοιχεία του I_L σε k ομάδες $L_1, \ldots, L_k$: $x \in L_i$ και $y \in L_j$ με $i < j \Rightarrow x \leq y$

$I_{L'} \leftarrow$ στιγμιότυπο στο οποίο κάθε στοιχείο του L_i στρογ/ται στο μεγαλύτερο του $(i = 1, \ldots, k-1)$

Για το $I_{L'}$, το πολύ $\lfloor 1/\epsilon \rfloor$ στοιχεία χωρούν σε έναν κάδο + το πολύ $k-1$ διαφορετικά μεγέθη

$\mathtt{OPT}(I_{L'}) \leq \mathtt{OPT}(I_L)$: Βάλε τα στοιχεία του L_{i-1} του $I_{L'}$ στου κάδους του I_L που έχουν στοιχεία του L_i

από την ειδική περίπτωση:

Σε πολ/κό χρόνο ως προς $k, 1/\epsilon$ βρίσκουμε λύση του I_L με $ALG(I_L) = \underbrace{OPT(I_{L'})}_{\text{Τα στοιχεία των } L_1, \ldots, L_{k-1}} + \underbrace{|I_L|/k}_{\text{Για τα στοιχεία του } L_k}$ κάδους

Ένα προσεγγιστικό σχήμα για το Bin-Packing πρόβλημα

- Θεώρημα: $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος ως προς n και $\frac{1}{\epsilon}$ που χρησιμοποιεί το πολύ $(1+\epsilon) \cdot \mathtt{OPT(I)} + 1$ κάδους ← Asymptotic PTAS

  Απόδειξη:

  Θέτοντας $k = 1/\epsilon^2$: $\mathtt{ALG}(I_L) = \mathtt{OPT}(I_{L'}) + |I_L|/k$

  $\leq \mathtt{OPT}(I_L) + \epsilon^2 |I_L|$ καθώς $k = 1/\epsilon^2$ και $\mathtt{OPT}(I_{L'}) \leq \mathtt{OPT}(I_L)$

  $\leq \mathtt{OPT}(I_L) + \epsilon \cdot \mathtt{OPT}(I_L)$ καθώς το ϵ είναι το μικρότερο μέγεθος του I_L

  $= (1+\epsilon) \cdot \mathtt{OPT}(I_L)$

  Για να λύσουμε το αρχικό πρόβλημα $\mathtt{I}$, βάζουμε στα κενά του $\mathtt{ALG}(I_L)$ τα στοιχεία του I_S

  - Αν αυτά χωρούν στα κενά:

    $\mathtt{ALG}(I) = \mathtt{ALG}(I_L)$

    $\leq (1+\epsilon) \cdot \mathtt{OPT}(I_L)$

    $\leq (1+\epsilon) \cdot \mathtt{OPT}(I)$

  - Διαφορετικά: Ολοί (εκτός 1) οι κάδοι είναι $(1-\epsilon)$ γεμάτοι

    $(ALG(I)–1) \cdot (1-\epsilon) < \sum_i s(a_i) \Rightarrow$

    $(ALG(I)–1) \cdot (1-\epsilon) < OPT(I) \Rightarrow$ $\sum_i s(a_i) < OPT(I)$

    $ALG(I) < OPT(I)/(1-\epsilon) + 1 \Rightarrow$

    $ALG(I) < (1+2\epsilon) \cdot OPT(I) + 1$ $\epsilon < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-\epsilon} \leq 1 + 2\epsilon$