Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Μέρος 6ο: Επίπεδα γραφήματα

Εξάμηνο: 7ο

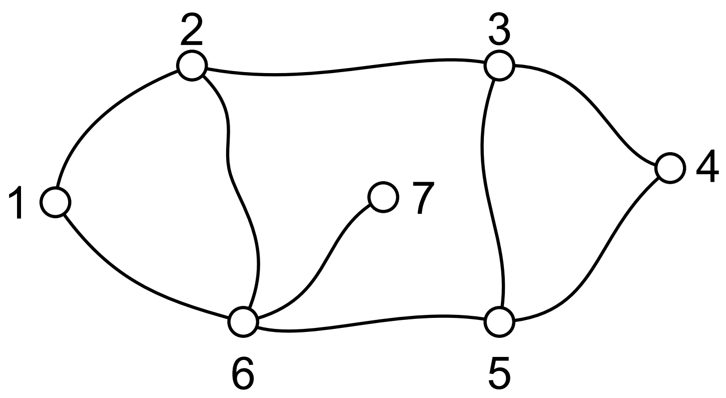
Κωδικός μαθήματος: 748

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μιχάλης Α. Μπέκος
bekos@uoi.gr

Επίπεδα γραφήματα

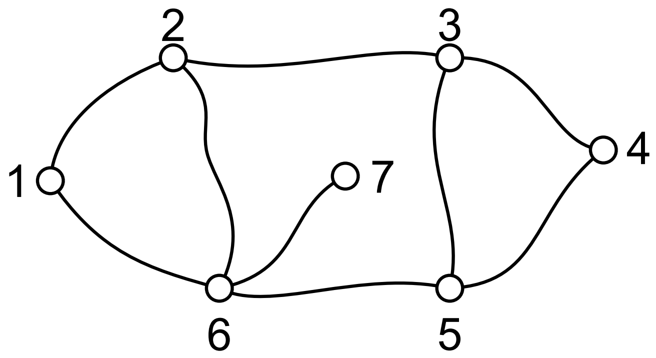
- Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι επίπεδο αν μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς διασταυρώσεις στο $\mathbb{R}^2$:
  - οι κορυφές είναι διακριτά σημεία του $\mathbb{R}^2$
  - οι ακμές είναι απλές καμπύλες Jordan που ενώνουν τα τερματικά τους σημεία
  - οι καμπύλες αυτές δεν διασταυρώνονται (εκτός τερματικών σημείων).
- Παράδειγμα:

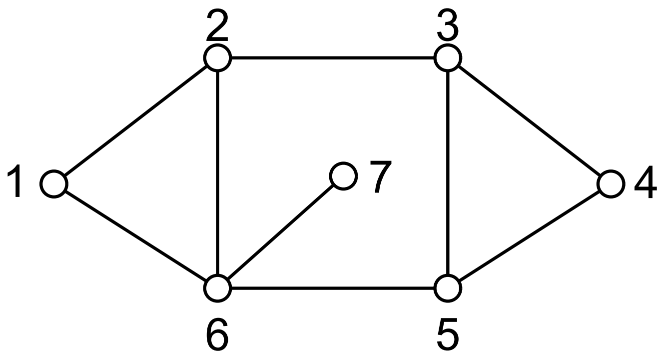


- Μια επίπεδη απεικόνιση διαμερίζει το $\mathbb{R}^2$ σε συνδεδεμένες περιοχές, που ονομάζονται όψεις
Η μη πεπερασμένη όψη ονομάζεται εξωτερική όψη

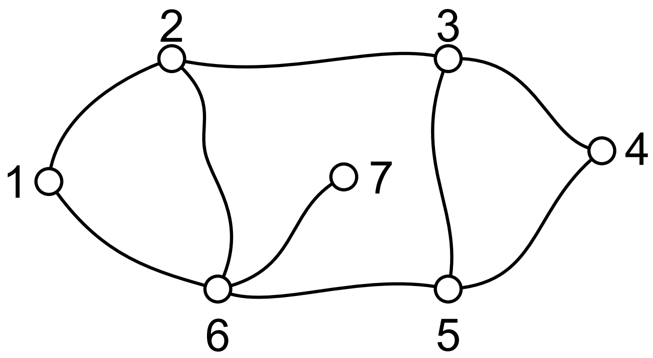
Επίπεδες εμφυτεύσεις

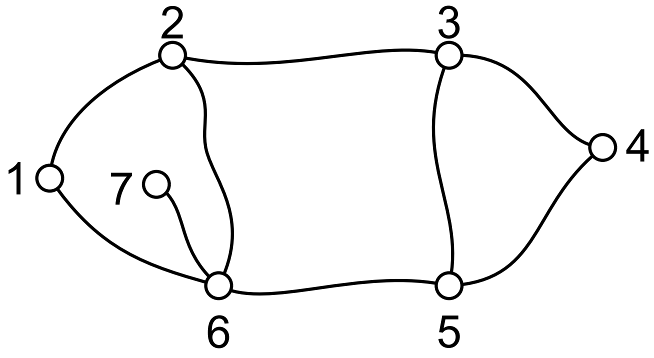
- Μια εμφύτευση είναι μια κλάση ισοδυναμίας επίπεδων απεικονίσεων με το ίδιο σύνολο όψεων
  - Ίδιες εμφυτεύσεις:





  - Διαφορετικές εμφυτεύσεις:





Κίνητρα για τη μελέτη τους

- Αρκετά δύσκολα προβλήματα επιδέχονται αποδοτικούς αλγορίθμους, όταν η είσοδος είναι ένα επίπεδο γράφημα.
- Αρκετές δομές είναι επίπεδες (ή σχεδόν επίπεδες).
- Τα επίπεδα γραφήματα επιδέχονται χαρακτηρισμού με όρους μη-επιτρεπτών ελάσσονων.
- Έχουν γραμμικό πλήθος ακμών.
- Έχουν χρωματικό αριθμό ≤ 4.

Η φόρμουλα του Euler

- Θεώρημα: Για ένα συνδεδεμένο επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m ακμές και f όψεις, ισχύει:

$$n + f = m + 2$$

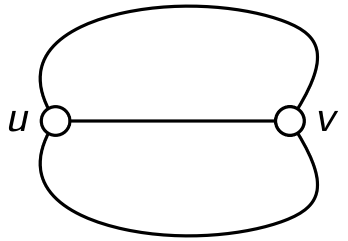
Απόδειξη:

Βάση: Γραφήματα μίας κορυφής $(n = f = 1, m = 0)$

Ε.Υ.: Η φόρμουλα του Euler ισχύει για γραφήματα με $m - 1$ ακμές.

Ε.Β.: Έστω $G = (V, E)$ ένα επίπεδο γράφημα με m ακμές.

- $\exists (u, v) \in E$ που οριοθετεί δύο όψεις

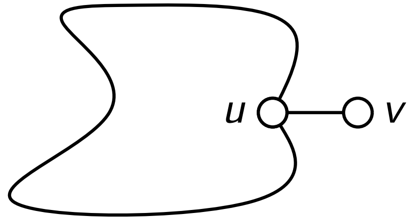


$G' \leftarrow G \setminus \{(u, v)\} \Rightarrow$

$n' = n; f' = f - 1; m' = m - 1$

Ε.Υ. $\Rightarrow n' + f' = m' + 2$

- κάθε ακμή $e \in E$ προσπίπτει σε μία μόνο όψη $\Rightarrow \exists\, v \in V$ με $\deg(v) = 1$



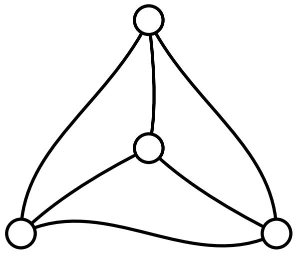
$G' \leftarrow G \setminus \{v\} \Rightarrow$

$n' = n - 1; f' = f; m' = m - 1$

Ε.Υ. $\Rightarrow n' + f' = m' + 2$

Μέγιστα επίπεδα γραφήματα

- Ορισμός: Ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα είναι ένα γράφημα του οποίου όλες οι όψεις είναι τριγωνικές



- Παρατήρηση: Για ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα ισχύει $3f = 2m$

  $n + f = m + 2 \Rightarrow m = 3n - 6$

- Θεώρημα: Για ένα επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές ισχύει: $m \leq 3n - 6 \Rightarrow f \leq 2n - 4$

  Απόδειξη:

  - $f_i \leftarrow$ πλήθος όψεων με μήκος i
  - $\left.\begin{array}{l} f = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots \\ 2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 2m \geq 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \ldots \Rightarrow 2m \geq 3f$
  - $m = n + f - 2 \Rightarrow m \leq n + 2/3m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$

Ορισμένες επισημάνσεις

- Πόρισμα: Κάθε επίπεδο γράφημα έχει μια κορυφή v με $\deg(v) \leq 5$

- Παρατήρηση: Ένας $O(n+m)$ αλγόριθμος για γενικά γραφήματα γίνεται $O(n)$ όταν η είσοδος είναι ένα επίπεδο γράφημα (π.χ., BFS/DFS)

- Έλεγχος επιπεδότητας:
  - Hopcroft, Tarjan (1974): Εισάγει μονοπάτια ξεκινώντας από έναν κύκλο
  - Even, Lempel, Cederbaum (1967): Εισάγει μία κορυφή ανά φορά
  - Booth, Lueker (1976): Γραμμικού χρόνου υλοποίηση του προηγούμενου αλγορίθμου

Μη επίπεδα γραφήματα

- Θεώρημα: Τα γραφήματα $K_{3,3}$ και K_5 δεν είναι επίπεδα

  Απόδειξη:

  - Έστω ότι το γράφημα $K_{3,3}$ είναι επίπεδο:

    $n = 6, m = 9 \Rightarrow f = m + 2 - n = 5$

  - Ποιο είναι το μέσο μήκος των όψεων του;

    $\hat{f} = \frac{3f_3+4f_4+5f_5+\ldots}{f} = \frac{2m}{f} = \frac{18}{5} < 4$

    $\Rightarrow \exists$ όψη μήκους ≤ 3; άτοπο

  - Έστω ότι το γράφημα K_5 είναι επίπεδο:

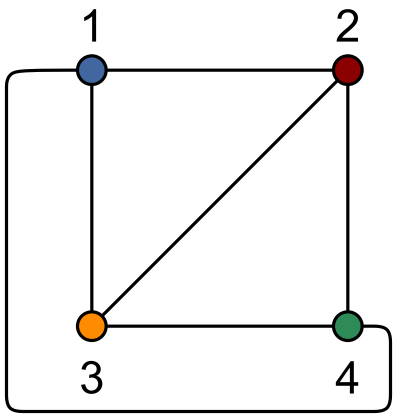
    $n = 5, m = 10 \Rightarrow m \leq 3n - 6$

    $\Rightarrow 10 \leq 11$; άτοπο

- Το θεώρημα του Kurantowski (1930): Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υποδιαίρεση του K_5 ή του $K_{3,3}$

Το θεώρημα των 4 χρωμάτων

- Θεώρημα: Κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται ένα χρωματισμό των κορυφών του με το πολύ τέσσερα χρώματα έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.



- Σημείωση: Η απόδειξη είναι περίπλοκη (ορισμένα μέρη της γίνονται με τη βοήθεια Η/Υ).

Το θεώρημα των 5 χρωμάτων

- Θεώρημα: Κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται ένα 5-χρωματισμό των κορυφών του

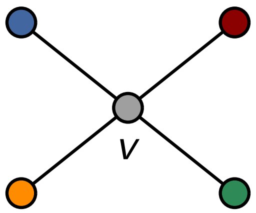
  Απόδειξη:

  Βάση: Γραφήματα μίας κορυφής (αρκεί ένα χρώμα)

  Ε.Υ.: Το θεώρημα ισχύει για γραφήματα με n κορυφές.

  Ε.Β.: Έστω $G = (V, E)$ ένα επίπεδο γράφημα με $n + 1$ κορυφές.

  - $\exists v \in V$ με $\deg(v) \leq 4$:

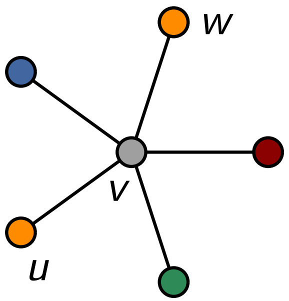


$G' \leftarrow G \setminus \{v\} \Rightarrow$

Ε.Υ. $\Rightarrow$ Το G' επιδέχεται 5-χρωματισμό

Χρωματίστε την v με το “ελεύθερο” χρώμα των γειτόνων της

  - κάθε κορυφή $v \in V$ έχει $\deg(v) = 5$:



Δύο γείτονες u, w της v δεν είναι γειτονικοί

$G' \leftarrow G \setminus \{u, v, w\}$ συγχωνεύοντας τις u, w

Ε.Υ. $\Rightarrow$ Το G' επιδέχεται 5-χρωματισμό

Χρωματίστε την v με το “ελεύθερο” χρώμα

Οι u, w παίρνουν το χρώμα της συγχωνευμένης

Τι γίνεται με τις διασταυρώσεις;

- $cr(G)$: Ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων του G

- Λήμμα: Αν ένα γράφημα G επιδέχεται απεικόνισης με $cr(G)$ διασταυρώσεις, τοτε:

$$cr(G) \geq m - 3n + 6$$

Απόδειξη:

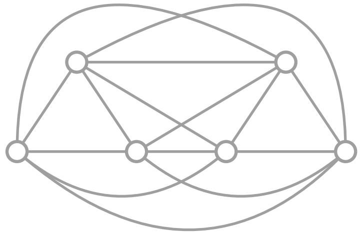
$H \leftarrow$ το γράφημα που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας τις διασταυρώσεις με κορυφές

$\Rightarrow$ Το H είναι επίπεδο με $n + cr(G)$ κορυφές και $m + 2cr(G)$ ακμές

$\Rightarrow m + 2cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6$

$\Rightarrow cr(G) \geq m - 3n + 6$

- Για το πλήρες γράφημα K_6: $n = 6, m = 15 \Rightarrow cr(K_6) \geq 3$



Το Λήμμα των διασταυρώσεων

- Θεώρημα: Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές και $m \geq 4n$ ακμές. Τότε:

$$cr(G) \geq \frac{cm^3}{n^2} \quad \text{όπου } c = \frac{1}{64} \approx 0.016$$

Απόδειξη:

Έστω $p \in [0, 1]$ παράμετρος που θα προσδιοριστεί σύντομα.

Επιλέγουμε κάθε κορυφή του G με πιθανότητα p.

$G_p \leftarrow$ το υπογράφημα του G με τις επιλεγμένες κορυφές.

λόγω του προηγούμενου λήμματος

$$\left.\begin{array}{l} n_p = |V(G_p)| \Rightarrow E[n_p] = np \\ m_p = |E(G_p)| \Rightarrow E[m_p] = mp^2 \\ c_p = |cr(G_p)| \Rightarrow E[c_p] = cr(G)p^4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow cr(Gp) \geq m_p - 3n_p \\ \Rightarrow E[cr(G_p)] \geq E[m_p] - 3E[n_p] \\ \Rightarrow \ldots \Rightarrow cr(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} \end{array}$$

Θέτοντας $p = \frac{4n}{m} \leq 1$: $cr(G) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{m^3}{n^2}$