Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Μέρος 5ο: Μέγιστες ροές

Εξάμηνο: 7ο

Κωδικός μαθήματος: 748

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μιχάλης Α. Μπέκος

bekos@uoi.gr

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

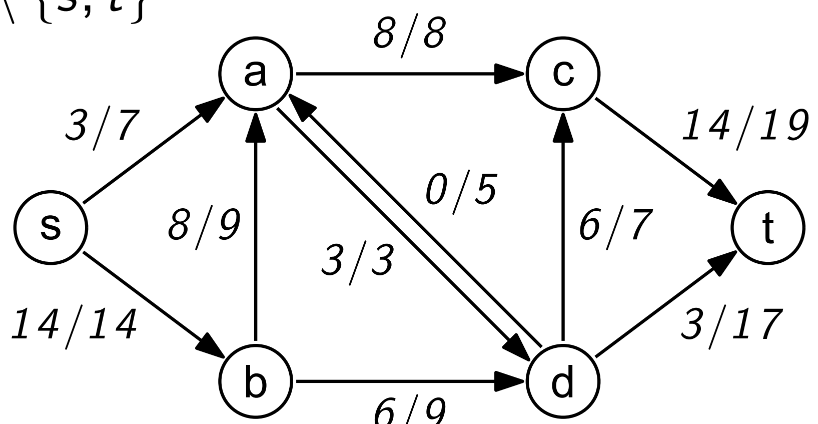
- Είσοδος:
  - ένα συνδεδεμένο κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
  - μια συνάρτηση χωρητικότητας $c : E \to \mathbb{R}^+$
  - μια κορυφή αφετηρία $\mathtt{s} \in \mathtt{V}$ με $\mathtt{indeg}(\mathtt{s}) = 0$
  - μια κορυφή προορισμού $\mathtt{t} \in \mathtt{V}$ με $\mathtt{outdeg}(\mathtt{t}) = 0$

- Έξοδος: Η μέγιστη ροή από το s στο t, δηλ $f : E \to \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε:

  (i) $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v), \;\; \forall (u, v) \in E$

  (ii) $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u), \;\; \forall u \in V \setminus \{s, t\}$

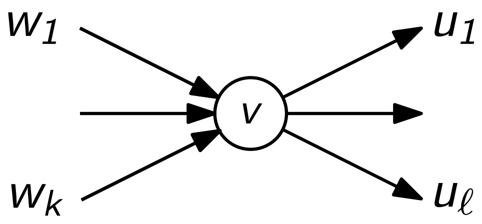
  (iii) Η τιμή $|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s, v)$ είναι μέγιστη



$|f| = 17$

Ορολογία

- Η $f(u, v)$ ονομάζεται ροή από την u στην v
- (i) $\Rightarrow$ η ροή από την u προς την v δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την χωρητικότητα $c(u, v)$
- (ii) $\Rightarrow$ η ροή προς μια κορυφή ισούται με τη ροή από αυτή (εσωροή = εξωροή)

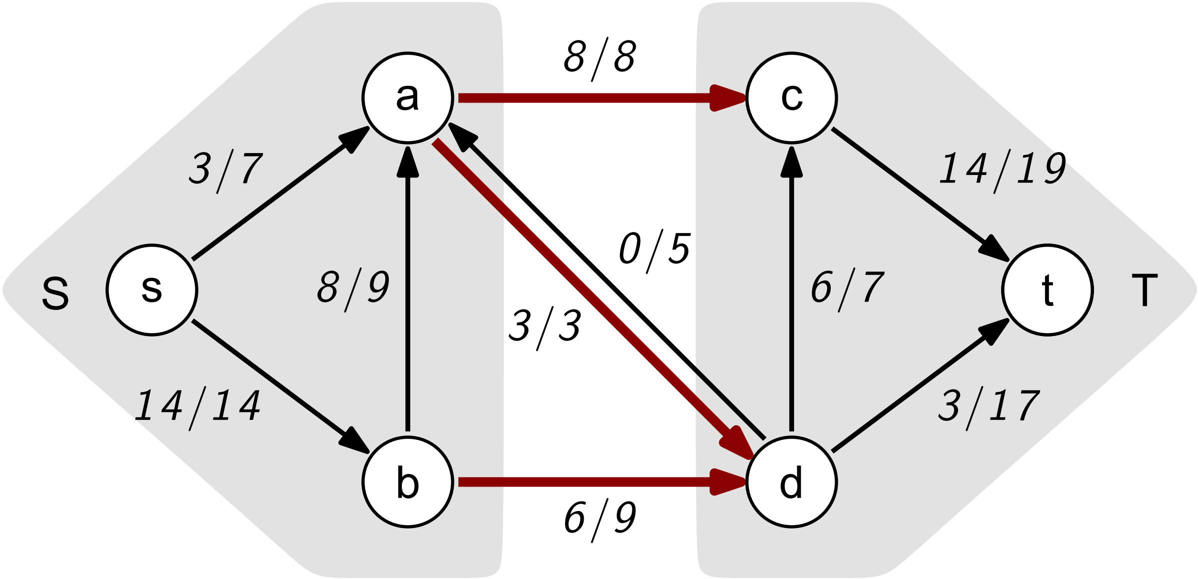


$$f(w_1, v) + \ldots + f(w_k, v) = f(v, u_1) + \ldots + f(v, u_\ell)$$

Μέγιστες ροές και (s, t)-τομές

- **Διαίσθηση:** Η ύπαρξη μιας (s, t)-τομής (S, T) συνεπάγεται:

$$|f| \leq c(S, T) = \sum_{\substack{(u,v)\in E \\ u\in S, v\in T}} c(u, v)$$



$$|f| \leq 20$$

Μέγιστες ροές και (s, t)-τομές

- Λήμμα: Για κάθε ροή f του G και κάθε (s, t)-τομή (S, T) ισχύει:

$$|f| \leq c(S, T)$$

Proof:

$= 0$, καθώς indegree$(s) = 0$ $\quad$ $= 0$, λόγω διατήρησης της ροής

$$|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v,s) + \sum_{\substack{u\in S-\{s\}\\(u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in S-\{s\}\\(v,u)\in E}} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\Big(\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{(v,u)\in E} f(v,u)\Big)$$

0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ≥ 0

$$= \sum_{\substack{u\in S,v\in S\\(u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in S,v\in S\\(v,u)\in E}} f(v,u) + \sum_{\substack{u\in S,v\in T\\(u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in S,v\in T\\(v,u)\in E}} f(v,u)$$

$$\leq \sum_{\substack{u\in S,v\in T\\(u,v)\in E}} f(u,v) \leq \sum_{\substack{u\in S,v\in T\\(u,v)\in E}} c(u,v) = c(S,T)$$

Μέγιστες ροές και (s, t)-τομές

- Λήμμα: Για κάθε ροή f στο G και κάθε (s, t)-τομή (s, t)-τομή (S, T) ισχύει:
$$|f| \leq c(S, T)$$

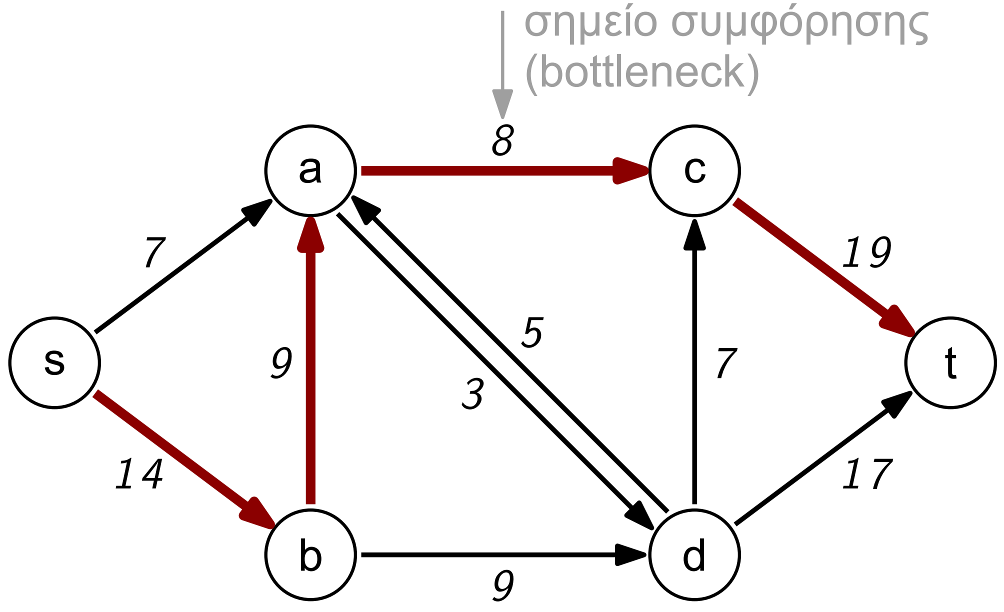
- Πόρισμα 1: Έστω f^* μια μέγιστη ροή του G. Τότε:
$$|f^*| \leq c(S, T), \quad \forall (s, t)\text{-cut } (S, T)$$

- Πόρισμα 2: Αν η f μια ροή τέτοια ώστε $|f| = c(S, T)$ για κάποια (s, t)-τομή (S, T), τότε η f είναι μια μέγιστη ροή και η (S, T) είναι μια ελάχιστη (s, t)-τομή

Μονοπάτια επαύξησης

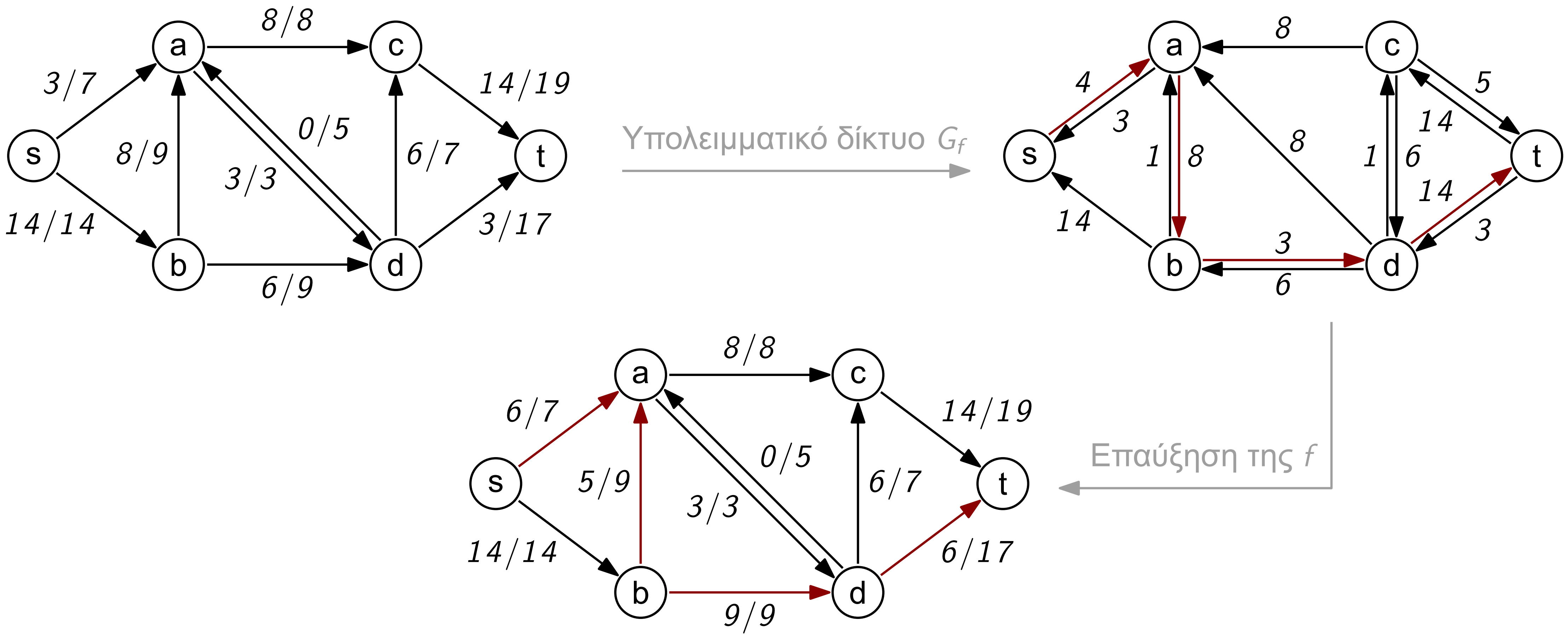
- Ορισμός: Ένα μονοπάτι επαύξησης είναι ένα μονοπάτι από την *s* στην *t* κατά μήκος του οποίου μπορούμε να “ωθήσουμε” πρόσθετη ροή

```
FordFulkerson(G, s, t)
{
   Initialize f to 0;
   while (there is augmenting path P)
   {
      augment f by the bottleneck of p;
   }
   return f;
}
```



Υπολειμματικό δίκτυο

- Περιγράφει για κάθε ακμή την υπολείπουσα χωρητικότητά της, δηλ πόση ροή μπορεί να περάσει



Υπολειμματικό δίκτυο

- Ορισμός: Δοθέντος ενός δικτύου ροής $G = (V, E)$ και μιας ροής f του G, το υπολειμματικό δίκτυο G_f του G ως προς τη ροή f ορίζεται ως εξής:

$$G_f = (V, E_f);\ E_f = \{(u, v) \in V^2;\ c_f(u, v) > 0\}$$

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{αν } (u, v) \in E \\ f(u, v) & \text{αν } (v, u) \in E \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Πόρισμα: $|E_f| \leq 2|E|$

Ορθότητα

- Ερώτηση: Είναι σωστός ο αλγόριθμος των Ford-Fulkerson;

  Απάντηση: Ναι, λόγω των δύο παρακάτω θεωρημάτων:

  - Θεώρημα των μονοπατιών επαύξησης:

    η f είναι μέγιστη $\iff$ δεν υπάρχει μονοπάτι επαύξησης στο υπολειμματικό δίκτυο G_f

  - Θεώρημα μέγιστης ροής ελάχιστης τομής:

    η f είναι μέγιστη $\iff$ η τιμή $|f|$ ισούται με το κόστος μιας ελάχιστης (s, t)-τομής

Ορθότητα

- Θεώρημα: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
  - (i) η f είναι μέγιστη
  - (ii) δεν υπάρχει μονοπάτι επαύξησης στο G_f
  - (iii) υπάρχει (s,t)-τομή (S_0, T_0) τέτοια ώστε $c(S_0, T_0) = |f|$

Proof:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Εξ ορισμού του υπολειμματικού δικτύου

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $S_0 \leftarrow$ κορυφές προσβάσιμες από την s στο G_f $\Rightarrow$ $T_0 = V \setminus S_0 \neq \emptyset$ (καθώς $t \in T_0$)

- $f(u,v) = c(u,v), \quad \forall (u,v) \in E$ με $u \in S_0, v \in T_0$
- $f(v,u) = 0, \quad \forall (v,u) \in E$ με $u \in T_0, v \in S_0$

Όπως στο πρώτο λήμμα: $|f| = \sum_{\substack{u \in S, v \in T \\ (u,v) \in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in S, v \in T \\ (v,u) \in E}} f(v,u) = c(S_0, T_0)$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Προηγούμενο πόρισμα

Επιστροφή στον αλγόριθμο των Ford-Fulkerson

```
FordFulkerson(G, s, t) {
   Foreach edge (u,v) of G do {
      f(u,v) = f(v,u) = 0;
   }
   Compute G_f;

   While there is a path P from s to t in G_f do {
      x = min{c_f(u,v); (u,v) ∈ P};
      foreach edge (u,v) in P {
         if (u,v) ∈ E then f(u,v) = f(u,v) + x
         else f(v,u) = f(v,u) - x
      }
      Update G_f;
   }
}
```

Πολυπλοκότητα

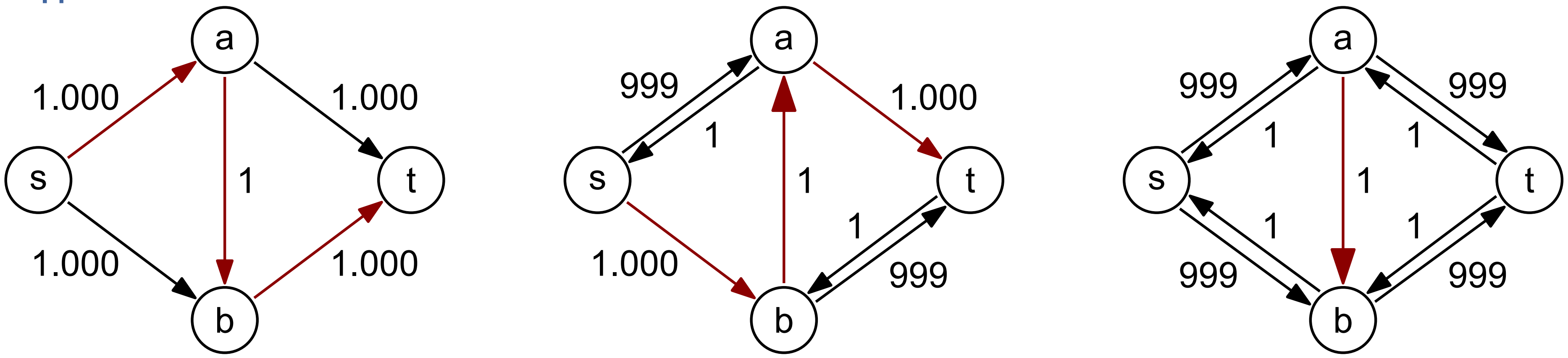
- Υπόθεση: Όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι αριθμοί, δηλ, $c : E \to \mathbb{N}^+$

  $\Rightarrow$

  ο αλγόριθμος θα τερματίσει μετά από το πολύ $|f^*|$ επαναλήψεις $\Rightarrow O(m|f^*|)$

  εξαρτάται από το μέγεθος της εξόδου

- Παράδειγμα:



Ο αλγόριθμος των Edmonds και Karp

- Παραλλαγή του αλγορίθμου των Ford και Fulkerson

- Ιδέα: Δεν χρησιμοποιείται οποιοδήποτε μονοπάτι για την αύξηση της ροής.
  Χρησιμοποιείται το συντομότερο.

- Αναλύουμε την πολυπλοκότητα αυτής της παραλλαγής χρησιμοποιώντας την ακόλουθη παράμετρο:

  $\Delta_f(v) =$ ο ελάχιστος αριθμός ακμών από την κορυφή s προς την κορυφή v στο G_f, $v \in V \setminus \{s, t\}$

Μια πρώτη ιδιότητα

- Ιδιότητα 1: Η παράμετρος $\Delta_f(v)$ δεν μειώνεται με προσαυξήσεις ροής.

  Απόδειξη:

  Έστω ότι υπάρχει προσαύξηση της ροής που μειώνει την $\Delta_f(v)$

  - $f \leftarrow$ ροή πριν την προσαύξηση
  - $f^* \leftarrow$ ροή μετά την προσαύξηση

  $$\left.\begin{array}{l} f \leftarrow \text{ροή πριν την προσαύξηση} \\ f^* \leftarrow \text{ροή μετά την προσαύξηση} \end{array}\right\} \Delta_{f^*}(v) < \Delta_f(v) \qquad (1)$$

  Χ.β.τ.γ., υποθέτουμε ότι η v είναι τέτοια ώστε:

  $\Delta_{f^*}(v) \leq \Delta_{f^*}(u) \forall u \in V \setminus \{s, t\}$ with $\Delta_{f^*}(u) < \Delta_f(u)$

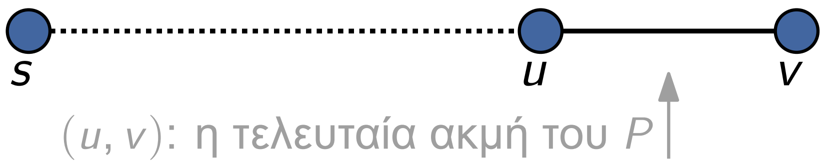
  Συνεπώς: $\Delta_{f^*}(z) < \Delta_{f^*}(v) \Rightarrow \Delta_f(z) \leq \Delta_{f^*}(z) \qquad (2)$

Μια πρώτη ιδιότητα

- Ιδιότητα 1: Η παράμετρος $\Delta_f(v)$ δεν μειώνεται με προσαυξήσεις ροής.

  Απόδειξη:

  Έστω P συντομότερο s-v μονοπάτι στο G_{f^*}:



  $$\Delta_{f^*}(v) = \Delta_{f^*}(u) + 1 \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \Delta_f(u) \leq \Delta_{f^*}(u) \quad (4)$$

  - $(u, v) \in G_f$: $(\iff f(u, v) < c(u, v))$

    $$\Delta_f(v) \leq \Delta_f(u) + 1 \overset{(4)}{\leq} \Delta_{f^*}(u) + 1 \overset{(3)}{=} \Delta_{f^*}(v)$$

    το συντομότερο μονοπάτι προς την v είναι μικρότερο αυτού προς την u + την ακμή προς την v.

  - $(u, v) \notin G_f$: $(\iff f(u, v) = c(u, v))$

    Η (v, u) είναι σε ένα συντομότερο μονοπάτι στο G_f:

    $$\Delta_f(v) = \Delta_f(u) + 1 \overset{(4)}{\leq} \Delta_{f^*}(u) - 1 \overset{(3)}{=} \Delta_{f^*}(v) - 2$$

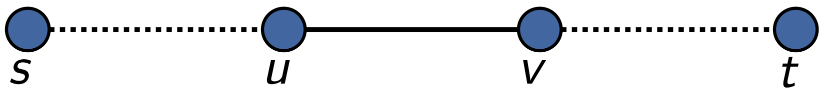
Μια δεύτερη ιδιότητα

- Ιδιότητα 2: Μια ακμή (u, v) μπορεί να είναι σημείο συμφόρησης $\leq \frac{n}{2} + 1$ φορές

  Απόδειξη:

  Η (u, v) είναι σημείο συμφόρησης $\Rightarrow \Delta_f(v) = \Delta_f(u) + 1 \quad (1)$

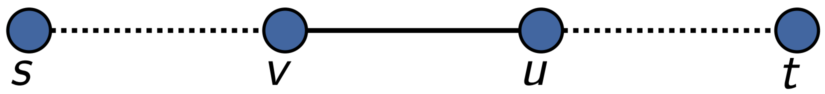
  G_f:

  Ακολούθως, η (u, v) χάνεται από το υπολειμματικό δίκτυο και εμφανίζεται ξανά όταν:

  $\Delta_{f*}(u) = \Delta_{f*}(v) + 1 \quad (2)$

  G_{f*}:

  Από την Ιδιότητα 1: $\Delta_{f*}(v) \geq \Delta_f(v) \quad (3) \;\Rightarrow \Delta_{f*}(u) \overset{(2)}{=} \Delta_{f*}(v) + 1 \overset{(3)}{\geq} \Delta_f(v) + 1 \overset{(1)}{=} \Delta_f(u) + 2$

  Η ιδιότητα έπεται από το γεγονός ότι η απόσταση της s από τη u είναι $< n - 2$

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου των Edmonds και Karp

- Θεώρημα: Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου των Edmonds και Karp είναι $O(m^2 n)$
  Απόδειξη:
  - Κάθε μονοπάτι επαύξησης έχει ένα σημείο συμφόρησης
  - Από την ιδιότητα 2, υπάρχουν το πολύ $(n/2 - 1)m$ μονοπάτια επαύξησης
  - Κάθε μονοπάτι επαύξησης μπορεί να βρεθεί σε χρόνο $O(m)$, π.χ., με BFS στο G_f

  $\Rightarrow$ Πολυπλοκότητα: $O(m^2 n)$

Επιπλέον υλικό

- Ενότητες 5.1-5.4 από τις σημειώσεις του μαθήματος.
  Διαθέσιμες στη σελίδα του μαθήματος στο ecourse.