Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

Μέρος 2ο: Επιμερισμένη ανάλυση

Εξάμηνο: 7ο

Κωδικός μαθήματος: 748

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μιχάλης Α. Μπέκος

bekos@uoi.gr

Επιμερισμένη ανάλυση

- Μέθοδος ανάλυσης του χρόνου που απαιτείται για μια ακολουθία n πράξεων

- Στόχος: Να αποδειχθεί ότι κατά μέσο όρο το κόστος ανά πράξη είναι “χαμηλό” ακόμη και αν ορισμένες πράξεις είναι “ακριβές”

- Διαφορά με τη μέση ανάλυση: Δεν υπάρχει υπόθεση πιθανότητας

- Μέθοδοι:
  - Μέθοδος του τραπεζίτη (accounting method)
  - Μέθοδος αθροιστικού υπολογισμού (aggregate method)
  - Μέθοδος του δυναμικού (potential method)

Προσέγγιση με ένα παράδειγμα

- Στοίβα με υποστήριξη multi-pop
  - `Push(S, x)`: Εισάγει το αντικείμενο `x` στη στοίβα `S`
  - `Pop(S)`: Επιστρέφει και διαγράφει από την `S` το τελευταίο εισαχθέν στοιχείο
  - `Multipop(S, k)`: Επιστρέφει και διαγράφει από την `S` τα τελευταία $\min\{k, |S|\}$ στοιχεία

- Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης:
  - `Pop, Push`: O(1)
  - `Multipop`: O(min{k, |S|})
  - Κάθε πράξη έχει στη χειρότερη περίπτωση γραμμικό κόστος
  - Οπότε συνολικά τετραγωνικό κόστος. Πολύ απίθανο!

Η μέθοδος του τραπεζίτη

- Κάθε πράξη επιφέρει την εισαγωγή ενός ή περισσότερων νομισμάτων σε μια “τράπεζα”.
- Οι ακριβές πράξεις “πληρώνονται” με το κεφάλαιο της τράπεζας (που πρέπει να ναι μη αρνητικό)
- ...πίσω στο παράδειγμα: Θεωρήστε οποιαδήποτε ακολουθία n πράξεων

	Λογιστική	Πραγματικό κόστος
`Push(S, x):`	Εισαγωγή 2 νομισμάτων	1 νόμισμα
`Pop(S):`	—	1 νόμισμα
`Multipop(S, k):`	—	$\min\{k, \lvert S\rvert\}$ νομίσματα

- Παρατηρήσεις:
  - Κεφάλαιο ≥ 0
  - Συνολικό κόστος: $\leq 2n$ νομίσματα

$\Big\}$ Επιμερισμένο κόστος: $\frac{2n}{n} = 2$

Η μέθοδος αθροιστικού υπολογισμού

- Εάν μια ακολουθία n πράξεων κοστίζει συνολικά $T(n)$,
  τότε το επιμερισμένο κόστος ανά πράξη είναι $T(n)/n$.

- ...πίσω στο παράδειγμα:
  - Παρατήρηση: Το συνολικό πλήθος των pops (συμπεριλαμβανομένων αυτών των multipop) στην ακολουθία είναι μικρότερο ή ίσο του συνολικού πλήθους των push.

    # συνολικό πλήθος push $\leq n$

  - Πόρισμα: Το κόστος των n πράξεων: $O(n) \Rightarrow$

    Επιμερισμένο κόστος ανά πράξη: $O(n)/n = O(1)$

Η μέθοδος αθροιστικού υπολογισμού

- Άσκηση: Θεωρήστε μια ακολουθία n πράξεων, τέτοια ώστε το κόστος της i-οστής πράξης είναι i, αν το i είναι δύναμη του 2, και 1 διαφορετικά.
  Ποιο είναι το επιμερισμένο κόστος ανά πράξη;

Η μέθοδος του δυναμικού

- Διατηρεί μια δομή δεδομένων που αλλάζει με την πάροδο του χρόνου:
  - D_0: αρχική κατάσταση
  - D_i: η κατάσταση μετά την i-οστή πράξη
  - c_i: το κόστος της i-οστής πράξης
  - $\Phi : \{D_0, \ldots\} \to \mathbb{R}$: απεικόνιση κάθε κατάστασης σε τιμή
- Επιμερισμένο κόστος της i-οστής πράξης: $\hat{c}_i = \underbrace{c_i}_{\text{πραγματικό κόστος}} + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{\text{μεταβολή του δυναμικού}}$
- Επιμερισμένο κόστος των n πράξεων:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i &= \sum_{i=1}^{n} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i + (\Phi(D_n) - \Phi(D_o))\end{aligned}$$

- Εάν η Φ οριστεί έτσι ώστε $\Phi(D_n) - \Phi(D_o) \geq 0$, τότε: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i}$

Η μέθοδος του δυναμικού

- ...πίσω στο παράδειγμα:

  $\Phi(D_i)$: πλήθος στοιχείων στη στοίβα S μετά την i-οστή πράξη

- i-οστή πράξη:
  - `Push(S, x)`: $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$
  - `Pop(S)`: $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 - 1 = 0$
  - `Multipop(S, k)`: $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \min\{k, |S|\} - \min\{k, |S|\} = 0$

- Συνολικό κόστος: $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$

- Επιμερισμένο κόστος: $O(1)$

Σύγκριση

- Στη μέθοδο αθροιστικού υπολογισμού, πρώτα αναλύουμε μια ολόκληρη ακολουθία και στη συνέχεια υπολογίζουμε το επιμερισμένο κόστος ανά πράξη.

- Στη μέθοδο του τραπεζίτη, αποδίδουμε πρώτα το επιμερισμένο κόστος ανά πράξη και στη συνέχεια εξετάζουμε αν αρκεί (δηλ, αν το κεφάλαιο στην τράπεζα μπορεί να γίνει αρνητικό)

- Στη μέθοδο του δυναμικού, ορίζουμε μια συνάρτηση και αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνάρτηση δυναμικού.

Επιπλέον υλικό

- Ενότητα 2.2 από τις σημειώσεις του μαθήματος.

  Διαθέσιμες στη σελίδα του μαθήματος στο ecourse.